Jurnal Ilmiah Wahana Pendidikan, Mei 2024, 10 (9), 1047-1053
DOI: https://doi.org/10.5281/zenodo.13603701
p-ISSN: 2622-8327 e-ISSN: 2089-5364
Accredited by Directorate General of Strengthening for Research and Development
Available online at https://jurnal.peneliti.net/index.php/JIWP

Properti Cakrawala Peristiwa pada Lubang Hitam Schwarzschild dalam Latar Alam Semesta Tertutup yang Berekspansi

Muh. Fachrul Latief[1*], Andi Indra Wulan Sari Ramadani[2]

[1,2] Jurusan Fisika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Gorontalo, Gorontalo, Indonesia

Received: *1 Mei 2024*
Revised: *15 Mei 2024*
Accepted: *26Mei 2024*

Abstract

A closed universe model containing a constant and positive vacuum energy density (cosmological constant) has been studied. By analyzing the McVittie metric, it can be shown directly that for an expanding universe, the Hubble parameter at the event horizon for all static symmetric black holes is the same. As for the cosmological constant, black holes will not expand as the universe expands. In addition, the existence of the Hubble voltage is also explained which can affect the speed of the universe's expansion in certain areas.

Keywords: *Horizon Properties, Schwarzschild Black Holes, Closed Universe*

(*) Corresponding Author: muh.fachrul@ung.ac.id

How to Cite: Latief, M., & Ramadani, A. I. W. (2024). Properti Cakrawala Peristiwa pada Lubang Hitam Schwarzschild dalam Latar Alam Semesta Tertutup yang Berekspansi. *Jurnal Ilmiah Wahana Pendidikan, 10*(9), 1047-1053. https://doi.org/10.5281/zenodo.13603701

PENDAHULUAN

Kehadiran teori relativitas umum yang diusulkan oleh Albert Einstein pada tahun 1915, di mana kehadiran materi sebagai bentuk manifestasi dari ruang-waktu memberikan paradigma baru terhadap pemahaman kita terhadap konsep gravitasi [1]. Hal ini memberikan implikasi pada hipotesis dengan eksisnya lubang hitam [2]. Solusi yang paling dasar dari persamaan medan gravitasi Einstein adalah solusi vakum dengan simetris bola yang secara asimtotik dapat dijelaskan oleh metrik Schwarzschild [3]. Pada tahun 1929, Edwin Hubble melakukan pengamatan yang menunjukkan bahwa semua galaksi bergerak saling menjauhi satu sama lain. Hal ini memberikan implikasi bahwa alam semesta mengalami ekspansi [4]. Berdasarkan prinsip kosmologi modern, pada skala terbesar alam semesta dapat diaproksimasikan menjadi homogen dan isotropik yang dijelaskan oleh metrik Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker (FLRW).

Namun kebanyakan penelitian terkait solusi gravitasi Einstein ini telah berfokus pada berbagai solusi lubang hitam yang terisolasi. Hal lain yang tidak dapat dikesampingkan dan lebih realistis bahwasanya sebuah lubang hitam dan semua benda langit benar-benar termuat dalam sebuah latar belakang alam semesta. Pada tahun 1933, McVittie merumuskan metrik untuk sebuah partikel bermassa yang berada dalam latar belakang alam semesta berekspansi, di mana partikel dapat berperilaku seperti metrik Schwarzschild pada jarak yang dekat dari lubang hitam dan berperilaku seperti metrik FLRW pada jarak yang jauh dari lubang hitam [5].

Metrik McVittie merupakan solusi yang unik karena menggambarkan sebuah lubang hitam simetris bola dengan massa konstan dalam ruang-waktu FLRW yang asimptotik. Akan tetapi, metrik ini memiliki singularitas kelengkungan dan tekanan yang tidak terbatas pada horison peristiwa dari lubang hitam tersebut

[6], kecuali parameter Hubble untuk perluasan alam semesta mempunyai waktu yang konstan. Hal ini memberikan dua kemungkinan peristiwa, yakni alam semesta yang statis atau alam semesta yang mengembang secara eksponensial. Untuk menghindari masalah ini, maka perlu mengasumsikan lubang hitam ini dikelilingi oleh rongga vakum yang berbentu bola (Vakuola Einstein-Straus), di mana batasan mengembang harus sesuai dengan ekspansi Hubble dari seluruh alam semesta [7]. Dengan demikian, alam semesta yang berada pada batas dalam rongga vakum akan dekat lubang hitam, bersesuaian dengan solusi Schwarzschild. Dan alam semesta yang berada pada batas luar rongga vakum akan bersesuaian dengan solusi FLRW. Sehingga ekspansi alam semesta tidak memberikan efek yang signifikan terhadap lubang hitam tersebut. Hal lain yang mungkin perlu dipertimbangkan dalam kasus ini adalah keruntuhan gravitasi dari sebuah benda yang mempunyai massa yang masif dan mengarah pada pembentukan lubang hitam dalam koordinat bergerak [8,9,10,11]. Keruntuhan gravitasi tersebut dapat menggantikan diskontinuitas Einstein-Straus pada batas rongga menjadi fungsi kerapatan energi kontinu, yang secara mulus bersesuaian dengan keruntuhan suatu materi dengan alam semesta [12,13,14].

Dalam artikel ini, akan ditelaah bagaimana metrik McVittie menjelaskan dengan terperinci lubang hitam Schwarzschild yang tertanam dalam ruang-waktu FLRW sebagai implikasi dari alam semesta yang berkespansi. Selain itu, akan dijelaskan bagaimana parameter Hubble pada horison peristiwa untuk semua lubang hitam Schwarzschild adalah sama dan hubungannya dengan konstanta kosmologi. Yang terakhir adalah menjelaskan bagaimana tegangan Hubble yang teramati mempengaruhi kecepatan yang berbeda pada daerah tertentu dalam alam semesta yang berekspansi [15].

Penurunan Metrik McVittie

Sebuah medan gravitasi dengan simetri bola yang menggambarkan sebuah lubang hitam dengan massa M dan tertanam pada sebuah latar semesta mengembang dengan kelengkungan spasial yang konstan serta dalam koordinat bergerak dan isotropik radial spasial, dapat digambarkan oleh metrik McVittie [5], yakni :

$$ds^2 = \frac{\left(1-\frac{GM\sqrt{K(r)}}{2c^2\,r}\right)^2}{\left(1+\frac{GM\sqrt{K(r)}}{2c^2\,r}\right)^2}\,c^2d\tau^2 - \frac{\left(1+\frac{GM\sqrt{K(r)}}{2c^2\,r}\right)^4}{K^2(r)}\left(dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2sin^2\theta\,d\phi^2\right) \quad (1)$$

di mana τ adalah swa-waktu kosmik dan $K(r) = 1 + \frac{kr^2}{4a^2(\tau_0)}$ (dengan $k = 0$ untuk alam semesta datar/Euclid, $k = +1$ untuk alam semesta tertutup, dan $k = -1$ untuk alam semesta terbuka).

Untuk mereduksi metrik McVittie pada persamaan (1) ke dalam metrik FLRW yang homogen dan isotropik, maka diasumsikan bahwasanya massa lubang hitam lenyap ($M = 0$), sehingga persamaan (1) menjadi

$$ds^2 = c^2d\tau^2 - \frac{a^2(\tau)}{(1+kr^2/4)}\left(dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2sin^2\theta\,d\phi^2\right) \quad (2)$$

Selanjutnya, ditinjau kasus alam semesta di mana partikel yang bergerak di dalamnya dianggap sebagai fluida sempurna (*perfect fluid*) dengan representasi tensor energi-momentum sebagai berikut

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)V_{\mu}V_{\nu} + pg_{\mu\nu} \quad (3)$$

di mana ρ adalah kerapatan materi dan tekanan dari materi fluida sempurna. Dengan demikian, persamaan Friedmann untuk kasus metrik McVittie pada persamaan (1) adalah

$$\kappa\rho = -\Lambda + \frac{3H}{c^2} + \frac{3k}{a^2}\left(1 + \frac{GM}{2c^2r}\sqrt{K(r)}\right)^{-4} - \frac{3k}{a^2}\frac{GM}{c^2r}\sqrt{K(r)}\ \left(1 + \frac{GM}{2c^2r}\sqrt{K(r)}\right)^{-5} \quad (4)$$

$$\kappa p = \Lambda - \frac{2\dot{H}}{c}\left(\frac{1+\frac{GM}{2c^2r}\sqrt{K(r)}}{1-\frac{GM}{2c^2r}\sqrt{K(r)}}\right) - \frac{3H^2}{c^2} - \frac{k}{a^2}\left(1 + \frac{GM}{2c^2r}\sqrt{K(r)}\right)^{-4} \quad (5)$$

di mana Λ ada konstanta kosmologi, $H = c\frac{\dot{a}}{a}$ adalah parameter Hubble dan $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$. Untuk kasus di mana jarak jauh lebih besar dari ukuran alam semestanya $\left(r \gg \frac{GM}{c^2 a(\tau)}\right)$, maka pada kondisi tersebut membuat massa lubang hitam lenyap $(M = 0)$. Dengan demikian, persamaan (4) dan (5) dapat direduksi menjadi

$$\kappa\rho = -\Lambda + \frac{3H^2}{c^2} + \frac{3k}{a^2} \quad (6)$$

$$\kappa p = \Lambda - \frac{2\dot{H}}{c} - \frac{3H^2}{c^2} - \frac{k}{a^2} \quad (7)$$

dengan memasukkan ungkapan parameter Hubble, maka diperoleh persamaan Friedmann yang bentuknya

$$\dot{a}^2 + k = \frac{a^2}{3}(\Lambda + \kappa\rho) \quad (8)$$

$$\dot{a}^2 + 2\ddot{a}a + k = a^2\,(\Lambda - \kappa p) \quad (9)$$

Kedua persamaan Friedmann akan tereduksi ke dalam metrik Schwarzschild yang mendeskripsikan solusi persamaan medan Einstein simetri bola pada keadaan vakum apabila kerapatan energi dan tekanan materi lenyap $(\rho = p = 0)$. Untuk kasus batas dalam dari rongga vakum alam semesta, maka kelengkungan spasial dapat diabaikan sehingga dapat diasumsikan alam semesta datar $(k = 0)$. Selanjutnya persamaan (1) akan tereduksi ke dalam persamaan Schwarzschild dalam koordinat bola istropik Weyl yang bentuknya

$$ds^2 = \frac{\left(1-\frac{GM}{2c^2\,r}\right)^2}{\left(1+\frac{GM}{2c^2\,r}\right)^2}\,c^2d\tau^2 - \left(1 + \frac{GM}{2c^2\,r}\right)^4 (dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2sin^2\theta\,d\phi^2) \quad (10)$$

Apabila memenuhi kondisi di mana periode waktunya yang singkat, maka ekspansi alam semesta dapat diabaikan sehingga faktor skala, parameter Hubble, dan konstanta kosmologi akan menjadi nol $(a = H = \Lambda = 0)$.

Parameter Hubble pada Horison Peristiwa

Horison peristiwa meruapakan batas di mana ruang dan waktu melengkung sedemikian rupa sehingga segala sesuatu yang mendekati batas ini akan ditarik ke dalam lubang hitam. Untuk dapat mendeskripsikan horison persitiwa, maka harus terpenuhi kondisi suku $g_{00} = 0$ pada persamaan (1), yakni

$$\left(1 - \frac{GM\sqrt{K(r)}}{2c^2 r_H}\right) = 0$$
(11)

dengan $r = r_H$ yang merupakan radius horison peristiwa. Untuk kasus $k = 0$, maka $r_H = \frac{GM}{2c^2}$. Namun hal lain yang perlu diperhatikan ketika persamaan (11) ke dalam persamaan (5), maka nilai tekanan menjadi tidak terhingga. Untuk menghindari kasus tersebut, maka ekspansi alam semesta pada horison caakrawala tidak bergantung waktu, sehingga memenuhi

$$\dot{\mathrm{H}}_{r=r_H} = 0$$
(12)

Sehingga untuk memenuhi kondisi pada persamaan (12), maka parameter Hubble pada horison peristiwa harus merupakan sebuah konstanta $H =$konstanta, sehingga faktor skala pada permukaan haruslah dalam bentuk eksponensial $a(\tau) = a(\tau_0)e^{H(\tau-\tau_0)}$. Ini dapat dilihat bahwasanya jika $H = 0$, maka faktor skala juga merupakan sebuah konstanta. Persamaan (8) juga yang menghindari kondisi di mana skalar Ricci pada horison peristiwa bernilai tidak terhingga. Selanjutnya, untuk memperoleh ungkapan parameter Hubble pada horison peristiwa, maka tinjau persamaan Friedmann (6) dengan asumsi bahwa kerapatan materi di dalam horison peristiwa dapat diabaikan, sehingga

$$H_{r=r_H} = \left(\frac{\Lambda}{3}\right)^{1/2} c$$
(13)

Hubungan ini memberikan deksripsi bahwasanya parameter Hubble pada horison peristiwa akan simetri pada pusat yang sama untuk semua lubang hitam. Hubungan ini juga berlaku pada kasus metrik McVittie, di mana lubang hitam pada horison peristiwa di berbagai titik dalam alam semesta akan simetri pada pusat yang sama. Hal ini menunjukkan secara eksplisit bahwa konstanta kosmologi tidak boleh bernilai negatif dan harus bernilai positif agar. Untuk tinjauan tekanan materi pada horison peristiwa akan lenyap yang memberikan sebuah pendekatan $r \to r_H$ dalam pada nilai $\dot{\mathrm{H}} = \frac{k}{16\, a^2(\tau)}$.

Selanjutnya dibahas bagaimana hubungan parameter Hubble pada horison peristiwa pada persamaan (13) terhadap keteraturan metrik McVittie pada sebuah horison persitiwa lubang hitam. Keteraturan ini juga merupakan konsekuensi dari terbentuknya horison peristiwa setelah waktu kosmik τ yang tak terhingga karena adanya dilatasi waktu gravitasi. Pada kondisi $\tau \to \infty$, maka persamaan Friedmann (6) menjadi menjadi $\mathrm{H} \to \mathrm{c}\left(\frac{\Lambda}{3}\right)^{1/2}$ untuk sembarang nilai rapat materi dan tekanan. Jika diambil kondisi di mana $\Lambda > 0$, maka memberikan gambaran alam semesta yang tertutup, di mana konstanta kosmologi Λ harus lebih besar dari beberapa nilai ambang batas untuk menghindari terjadinya kontraksi alam semesta. Sedangkan untuk kondisi $\Lambda > 0$, maka $\mathrm{H} \to 0$ memberikan gambaran bahwasanya model alam semesta yang ditinjau bukanlah alam semesta yang tidak tertutup. Oleh karena itu, $\dot{\mathrm{H}} \to 0$ pada kondisi $\tau \to \infty$. Dengan demikian, keteraturan pada horison peristiwa terjadi dalam limit yang sama dengan pembentukannya, sehingga metrik McVittie akan bersifat demikian.

Properti Cakrawala Peristiwa pada Alam Semesta Mengembang

Persamaan Einstein pada kondisi $T_{\tau r} = 0$ memberikan konsekuensi yang memenuhi kekekalan massa suatu lubang hitam. Hal ini dapat dilihat dari hubungan horison peristiwa pada persamaan (11) yang memberikan kekekalan r_H. Oleh karenanya, dalam kondisi di mana tidak terdapat distribusi material, maka jari-jari cakrawala peristiwa lubang hitam akan tetap konstan. Secara ekuivaken, pada saat alam semesta berekspansi, maka koordinat radial yang bergerak dari suatu horison peristiwa akan berkurang. Dengan demikian, lubang hitam tidak mengalami perubahaan seiring dengan terjadinya ekspansi alam semesta.

Pembenaran lainnya untuk pernyataan ini muncul dari pertimbangan metrik Kottler :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2Gm}{c^2 r} - \frac{\Lambda r^2}{3}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{(1 - 2Gm/c^2 r - \Lambda r^2/3)} - r^2 (d\theta^2 - sin^2\theta \; d\phi^2) \qquad (14)$$

di mana metrik Kottler ini akan tereduksi menjadi persamaan Schwarzschild isotropik ketika nilai $\Lambda = 0$ dengan jari-jari r pada koordinat radial. Horison peristiwa akan sama dengan $r_H = 2Gm/c^2$ yang tertuang pada persamaan (11). Bentuk ini memberikan penafsiran deskripsi tentang jembatan Einstein-Rose terkait lubang cacing (*wormholes*), yakni jembatan yang menghubungkan lubang hitam dengan lubang putih yang terhubung pada suatu horison peristiwa yang sama. Jari-jari r akan mempunyai range dari r_H sampai ∞. Bentuk ini memberikan deskripsi lubang hitam dengan range r dari 0 sampai ∞ dan terjadinya singularitas kelengkungan pada kondisi $r = 0$.

Selain kondisi di atas, terdapat hal yang tak kalah penting untuk ditelaah, kondisi di mana $\mathrm{m} = 0$, maka metrik (14) akan tereduksi menjadi metrik de Sitter dari alam semesta tanpa materi dengan konstanta kosmologi positif yang mengembang secara eksponensial. Oleh karena itu, metrik Kottler yang biasa dikenal dengan metrik Schwarzschild-de Sitter, di mana metrik ini menggambarkan sebuah lubang hitam dengan simetris yang terpusat dan tertanam dalam ruang datar (atau di wilayah kecil alam semesta, di mana kelengkungan spasial dapat diabaikan) dengan konstanta kosmologi yang positif.

Selanjutnya tinjau konstanta parameter Hubble pada persamaan (13), metrik McVittie pada persamaan (1) dengan nilai $k = 0$ maka akan ekuivalen dengan metrik Schwarzschild-de Sitter melalui transformasi koordinat sebagai berikut [16]:

$$r = a(\tau)\, \bar{r} \left(1 + \frac{Gm}{c^2 \bar{r}}\right)^2 \qquad (15)$$

$$\mathrm{ct} = \mathrm{c}\tau + 8 \left(\frac{Gm}{c^2}\right)^2 \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}\; F\left(\frac{1 - \mu(\tau)}{1 + \mu(\tau)}\right) \qquad (16)$$

di mana fungsi F diberikan oleh

$$F(x) = \int \frac{dx}{(1-x^2)[x^2(1-x^2)^2-(4/3)(Gm/c^2)^2\,\Lambda]} \quad (17)$$

Kesetaraan dapat terbukti karena parameter Hubble pada horison peristiwa dari sebuah lubang hitam, di mana terdapat ruang kosong yang mengelilingi lubang hitam itu sendiri bernilai konstan dalam metrik McVittie. Jari-jari horison peristiwa juga akan lenyap seiring dengan kondisi koefisien c^2dt^2 di dalam metrik McVittie. Oleh karena itu, jari-jari horison peristiwa menjadi konstan dalam koordinat waktu, memberikan implikasi bahwa lubang hitam tidak akan berubah seiring dengan berekspansinya alam semesta, yang sesuai dengan hasil [17].

Pengaruh Tegangan Hubble terhadap Faktor Skala

Pada dasarnya, lubang hitam tidak dapat tertanam dalam sebuah latar belakang dengan rata-rata kerapatan energi yang seragam yang diberikan oleh persaaan Friedmann. Hal ini berdasarkan pada keteraturan McVittie pada horison persitiwa lubang hitam. Untuk lubang hitam yang tertanam dengan materi kosong $(m = 0)$ pada sebuah alam semesta, maka kerapatan energinya akan sama dengan kerapatan energi vakum yang konstan dalam hal ini yang dimaksud adalah konstanta kosmologis. Dengan demikian, metrik McVittie dengan kerapatan energi yang konstan akan memiliki parameter Hubble yang konstan sehingga memiliki horison peristiwa yang teratur. Kondisi horison peristiwa ini ditentukan oleh parameter Hubble yang juga bergantung pada konstanta kosmologi. Dengan demikian, konstanta kosmologi memiliki peranan yang penting dalam kasus ini.

Selanjutnya kondisi lubang hitam di luar batas rongga, maka kerapatan energi merupakan jumlah kerapatan energi ruang hampa dan kerapatan energi materi. Kerapatan energi dan tekanan bergantung pada distribusi materi, yang bergantung pada besaran faktor skala dan parameter Hubble berdasarkan persamaan (4) dan (5). Dengan demiian, distribusi kerapatan energi yang tidak sama memberikan implikasi paramter Hubble pada berbagai daerah di alam semesta akan berbeda dengan nilai paraeter Hubble di horison peristiwa. Persamaan Friedmann (8) dan (9) adalah persamaan lokal, yang menentukan nilai lokal faktor skala dan parameter Hubble. Tegangan Hubble merupakan perbedaan nyata antara nilai-nilai parameter Hubble yang diukur di berbagai wilayah ruang-waktu alam semesta [15], dan hal ini merupakan konsekuensi alami dari metrik McVittie

KESIMPULAN

Metrik McVittie merupakan solusi klasik dari persamaan gravitasi Einstein yang mendeskripsikan sebuah lubang hitam simetris bola dan tertanam dalam alam semesta yang berekspansi. Kerapatan energi materi pada horison peristiwa lubang hitam akan lenyap. Konsekuensinya, parameter Hubble pada horison peristiwa untuk semua lubang hitam simetris bola akan sama dengan konstanta yang ditentukan oleh konstanta kosmologis pada persamaan (9). Selain itu, sifat lubang hitam yang tertanam dalam alam semesta yang berkespansi dapat diketahui bahwa lubang hitam tersebut tidak akan mengkuti ekspansi alam semesta dilihat dari kesetaraan yang dihasilkan darimetrik McVittei dan parameter Hubble pada r_H.

DAFTAR PUSTAKA

[1] *Einstein, Albert, "The Foundation of the General Theory of Relativity",* Annalen der Physik. ***354** (7), pp. 769, 1916.*

[2] R. Penrose, Phys. Rev. Lett. **14**, 57 (1965); R. Sch¨odel *et al.*, Nature **419**, 694 (2002); A. M. Ghez *et al.*, Astrophys. J. **586**, L127 (2003).

[3] K. Schwarzschild, Sitz. K. Preuss. Akad. Wiss. **7**, 189 (1916).

[4] E. P. Hubble (Mt. Wilson Observ.), Astrophys. J. **69**, 103-158 (1929).

[5] G. C. McVittie, Mon. Not. R. Astron. Soc. **93**, 325 (1933).

[6] M. Ferraris, M. Francaviglia, and A. Spallicci, Nuovo Cim. B **111**, 1031 (1996).

[7] A. Einstein and E. G. Straus, Rev. Mod. Phys. **17**, 120 (1945); Rev. Mod. Phys. **18**, 148 (1946).

[8] R. A. Tolman, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **20**, 169 (1934).

[9] J. R. Oppenheimer and H. Snyder, Phys. Rev. **56**, 455 (1939).

[10] H. Bondi, Mon. Not. R. Astron. Soc. **107**, 410 (1947).

[11] G. C. Omer, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **53**, 1 (1965).

[12] G. C. McVittie, Mon. Not. R. Astron. Soc. **92**, 500 (1932);

[13] J. Sultana and C. C. Dyer, Gen. Relativ. Gravit. **37**, 1347 (2005)

[14] M. Demia´nski and J. P. Lasota, Nat. Phys. Sci. **241**, 53 (1973)

[15] A. G. Riess, Nat. Rev. Phys. **2**, 10 (2020).

[16] H. P. Robertson, Phil. Mag. **5**, 835 (1928).

[17] R. Gaur and M. Visser, J. High Energy Phys. **05**, 172 (2024).